ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES COMMERCIALES

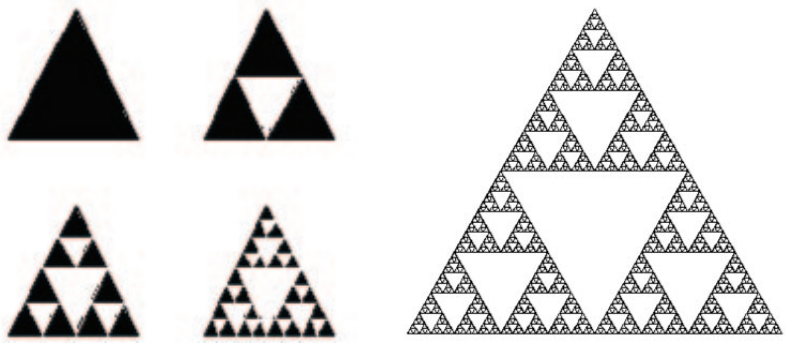
OPTION TECHNOLOGIQUE

Mardi 13 mai 2003, de 8h à 12h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE

On considère un triangle équilatéral $A_0B_0C_0$ de longueur de côté 1, d'aire $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$, peint en noir ; on désigne respectivement par A_1, B_1, C_1 les milieux des côtés $[B_0C_0]$, $[A_0C_0]$, $[A_0B_0]$ et on peint en blanc l'intérieur du triangle $A_1B_1C_1$. On effectue ensuite la même opération sur chacun des triangles encore noirs $A_0C_1B_1$, $C_1B_0A_1$, $B_1A_1C_0$ et ainsi de suite pour obtenir les figures suivantes :



Pour tout entier naturel n, soit t_n le nombre de triangles équilatéraux encore noirs avant la $(n+1)$-ième opération, c_n le nombre total de leurs côtés, s_n le nombre total de leurs sommets et a_n la longueur de leur côté. On a donc : $t_0 = 1,\ c_0 = 3,\ s_0 = 3,\ a_0 = 1,\ t_1 = 3,\ c_1 = 9,\ s_1 = 6,\ a_1 = \dfrac{1}{2}$.

1. Expimer a_n en fonction de n, pour tout entier naturel n.

2. Soit n un entier naturel n. Exprimer les nombres $t_{n+1},\ c_{n+1},\ s_{n+1}$ à l'aide des nombres $t_n,\ c_n,\ s_n$ et en déduire l'égalité matricielle :

$$\begin{pmatrix} t_{n+1} \\ c_{n+1} \\ s_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} t_n \\ c_n \\ s_n \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad M \text{ est la matrice } \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. a) Calculer M^2 et M^3.

b) Montrer qu'il existe une suite de réels $(u_n)_{n\geqslant 1}$ vérifiant, pour tout entier naturel non nul n :

$$M^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & u_n & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = 3\,u_n + 1$$

c) Exprimer, pour tout entier naturel non nul n, u_n uniquement en fonction de n.

4. Utiliser les résultats de la question précédente pour montrer que, pour tout entier naturel n, on a :

$$\begin{cases} t_n &= 3^n \\ c_n &= 3^{n+1} \\ s_n &= \dfrac{3}{2}(1+3^n) \end{cases}$$

5. Pour tout entier naturel n, on désigne par b_n le nombre de triangles équilatéraux déjà peints en blanc avant la $(n+1)$-ième opération.

a) Calculer, pour tout entier naturel n, $b_{n+1} - b_n$ en fonction de t_n, puis b_{n+1} en fonction uniquement de n.

b) En déduire, pour tout entier naturel n, l'égalité :

$$1 + t_n + b_n - c_n + s_n = 2 \quad (\textit{relation d'Euler})$$

6. Pour tout entier naturel n, on note p_n la somme des périmètres des triangles encore noirs avant la $(n+1)$-ième opération et S_n la surface déjà peinte en blanc.

a) Exprimer p_n en fonction de n, pour tout entier naturel n, et déterminer la limite de la suite $(p_n)_{n\geqslant 0}$.

b) Établir, pour tout entier naturel n l'égalité : $\quad S_n = \dfrac{\sqrt{3}}{4}\left(1 - \left(\dfrac{3}{4}\right)^n\right)$.

En déduire la limite de la suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$. Ce résultat était-il prévisible ?

c) Montrer qu'il existe un réel D que l'on précisera, compris strictement entre 1 et 2 et vérifiant pour tout entier naturel n : $\quad t_n = \left(\dfrac{1}{a_n}\right)^D$.

La surface noire est connue sous le nom de Joint de Culasse de Sierpinsky ; D est appelé sa dimension fractale.

PROBLÈME

L'objet du problème est l'étude de la rentabilité du « surbooking » pour une compagnie aérienne.

Partie I : Expression de l'espérance du chiffre d'affaire

Dans cette partie, n est un entier naturel non nul, N un entier supérieur ou égal à 2, et p un réel strictement compris entre 0 et 1.
Une compagnie aérienne a vendu n billets à cent euros pour le vol 714 qui peut accueillir jusqu'à N passagers.
La probabilité pour qu'un acheteur se présente à l'embarquement est p et les comportements des acheteurs sont supposés indépendants les uns des autres.
Un acheteur qui ne se présente pas à l'embarquement est remboursé à 80%, tandis qu'un acheteur qui se présente à l'embarquement mais n'obtient pas de place, le vol étant déjà complet, est remboursé à 200%.
Soit X la variable aléatoire désignant le nombre d'acheteurs d'un billet se présentant à l'embarquement, soit Y la variable aléatoire désignant le nombre d'acheteurs d'un billet se présentant à l'embarquement mais n'obtenant pas de place et soit G la variable aléatoire désignant le montant en **centaines** d'euros du chiffre d'affaire de la compagnie sur le vol considéré.
On suppose ces variables aléatoires définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

1. Quelle est la loi de X ? Donner son espérance et sa variance.

2. Préciser, pour tout élément ω de Ω, la valeur de $Y(\omega)$ en fonction de N et de $X(\omega)$, en distinguant les cas $X(\omega) > N$ et $X(\omega) \leqslant N$.

3. Justifier l'égalité : $G = 0,2\,n + 0,8\,X - 2Y$.

4. On suppose, dans cette question seulement, que n est inférieur ou égal à N. Quelle est la seule valeur possible pour Y ? Calculer alors l'espérance $\mathbf{E}(G)$ de la variable aléatoire G.

La compagnie cherche alors à évaluer la probabilité $\mathbf{P}([X \geqslant N])$ afin de déterminer le nombre n permettant d'optimiser son chiffre d'affaire.

Partie II : Approximations dans des cas particuliers

On reprend, dans cette partie les notations et les définitions de la Partie **??**

1. On suppose, dans cette question, que p est égal à $0,5$ et on considère la variable aléatoire définie par :

$$X^* = \frac{2X - n}{\sqrt{n}}$$

a) Donner l'espérance et la variance de X^*.

b) Justifier les égalités :

$$\mathbf{P}([X \geqslant N]) = 1 - \mathbf{P}\left(\left[X \leqslant N - \frac{1}{2}\right]\right) = 1 - \mathbf{P}\left(\left[X^* \leqslant \frac{2N - 1 - n}{\sqrt{n}}\right]\right)$$

c) Pour tout réel x supérieur ou égal à 1, on pose : $f(x) = \dfrac{x + 1 - 2N}{\sqrt{x}}$.
Montrer que la fonction f est croissante.

d) On désigne par Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, on suppose que N est égal à 320 et on donne : $\Phi\left(-\dfrac{6}{\sqrt{645}}\right) \approx 0,408$; $\Phi\left(-\dfrac{7}{\sqrt{646}}\right) \approx 0,391$.
En admettant que l'on puisse approcher la loi de X^* par la loi normale centrée réduite, que peut-on en déduire pour $\mathbf{P}([X \geqslant 320])$ si n est inférieur ou égal à 645, puis si n est supérieur ou égal à 646 ?

2. Pour tout entier naturel non nul m, on considère la fonction g_m définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$g_m(x) = e^{-x} \sum_{k=0}^{m} \frac{x^k}{k!}$$

a) Montrer que la fonction dérivée de g_m est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\quad g'_m(x) = -e^{-x}\,\dfrac{x^m}{m!}$.

b) Étudier sur $\mathbb{R}_+^*$ les variations de la fonction $x \mapsto e^{-x}\,x^m$, montrer qu'elle y admet un maximum et en déduire pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$, la double inégalité : $\quad -e^{-m}\,\dfrac{m^m}{m!} \leqslant g'_m(x) \leqslant 0$.

c) Soit a et b sont deux réels vérifiant $0 < a < b$. En intégrant les trois membres de la double inégalité précédente, montrer que l'on a :

$$0 \leqslant g_m(a) - g_m(b) \leqslant (b-a)e^{-m}\,\frac{m^m}{m!}$$

3. On suppose, dans cette question, que p est égal à $0,99$ et que n est strictement supérieur à N.

a) Préciser la loi de la variable aléatoire $n - X$.

b) On supposera, dans les prochains calculs que la loi de la variable aléatoire $n - X$ peut être remplacée par la loi de Poisson de paramètre $0,01\,n$ dont on note F la fonction de répartition. Montrer que la probabilité $\mathbf{P}([X \geqslant N])$ est alors égale à $F(n-N)$.

c) Exprimer le nombre $F(n-N)$ à l'aide de la fonction g_m de la question **??** obtenue pour $m = n-N$.

d) On suppose que N est égal à 300.
Pour tout réel strictement positif α, on note F_α la fonction de répartition de la loi de Poisson de paramètre α et on donne :

$$F_3(2) \approx 0,423\ ; \quad F_3(3) \approx 0,647\ ; \quad e^{-3}\frac{3^3}{3!} \approx 0,224$$

Montrer que, si n est égal à 302, $\mathbf{P}([X \geqslant N])$ est au plus égal à $0,5$ et que, si n est égal à 303, $\mathbf{P}([X \geqslant N])$ est strictement supérieur à $0,6$.